

てこ比に基づいた「外れ値」の検出

——法科大学院適性試験での事例——

杉澤武俊，椎名久美子（大学入試センター研究開発部）

法科大学院適性試験の得点データに対して，てこ比による基準を用いて外れ値の検出を行った。過去4回分のいずれの試験においても，散布図を目視した場合よりも多くのデータが外れ値として検出された。また，本ケースではてこ比によって機械的に外れ値を除外しても相関分析には実質的な影響を及ぼさなかった。さらに，外れ値と見なされた受験者の学部類型に着目することで，平均点の比較では表れてこなかった受験者集団の定性的な差異を検討し，試験問題を改善する新たな視点を与える可能性があることが示唆された。

1. はじめに

入試研究では，さまざまな相関分析がなされる機会が多い。例えば，試験の科目間の相関，センター試験と2次試験の得点間の相関，入試成績と入学後の学業成績との間の相関等を求めることによって，試験問題の妥当性の検討などを行う基礎的な資料となる。相関係数は，外れ値，選抜効果，層別化の効果などの影響を非常に受けやすい指標であることが知られているが，入試研究で扱われるデータはこれらの要因によって相関係数の値が歪められることが多いと考えられる。本研究ではこれらの要因のうち，外れ値に着目する。

外れ値とは分布全体から大きく離れたデータのことを指す。相関分析がなされるような多変数を扱う場合では，個々の変数単独の分布で見たときには外れ値にならないが，多変数を総合的に見ると全体の分布から大きく離れた「多変量外れ値」（伊藤 2006）となって相関係数に影響を及ぼす場合がある。

どのようなデータを外れ値と見なすかについては目視によって主観的に判定する方法の他にも，統計的な基準を用いたものも提案されている。本研究では，外れ値検出の方法として，統計的な指標である「てこ比」を基準として用いた場合に，

1. どのようなデータが「外れ値」として検出されるか
2. 検出された「外れ値」を機械的に除外すると相関係数をはじめとする分析結果にどのような影響があるか
3. 検出された「外れ値」から試験問題や受験者等の性質について示唆が得られるか

ということについて検討する。

2. てこ比の定義と「外れ値」検出の基準

繁樹・柳井・森(1999)はてこ比の値を求めるための計算法をいくつか紹介しているが，例えば主成分分析に基づいて以下のように定義することができる。

1. 変数の個数を p 個とし，その p 変数の相関係数行列について主成分分析を行う。
2. p 個の主成分得点を平均が 0，分散が 1 となるように標準化した得点をそれぞれ z_1, z_2, \dots, z_p で表す。
3. 各受験者の標準化された主成分得点の平方和を全受験者数 (N) 割った値

$$h = \frac{z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_p^2}{N}$$

をその受験者のてこ比とする。

こうして求めたてこ比は，(1) $0 \leq h \leq 1$ および

(2) $\bar{h} = \frac{p}{N}$ という性質を持つ。

データが分布の中心から離れていくほどてこ比の値は大きくなるが、てこ比がいくら以上なら「外れ値」と見なすかということについては明確な基準はなく、いくつかの異なる目安が提案されている。例えば、Hoaglin and Welsch (1978)は $h \geq 2\bar{h} = 2\frac{p}{N}$ となるデータを外れ値と見なすという目安を提案している。

3. 法科大学院適性試験データを用いた適用例

「てこ比」を用いた外れ値検出の適用例として、大学入試センターが調査研究の一環として実施している法科大学院適性試験（以下、「適性試験」）のデータを用いた結果について紹介する。

適性試験とは、「法律学についての知識ではなく、法科大学院における履修の前提として要求される判断力、思考力、分析力、表現力等の資質を試す」（司法制度改革審議会、2001）ことを目的として作成されており、平成15年から実施されている。試験科目は第1部「推論・分析力」、第2部「読解・表現力」の2部構成である（各部50点満点、総合100点満点）。本研究では、平成15～17年度の本試験および平成15年度に行われた特例措置試験の4回分の試験を対象とし、第1部と第2部の相関関係を分析する場合の外れ値について考える。

本研究では、Hoaglin and Welsch(1978)に基づいて、てこ比の値が $h \geq 2\frac{p}{N} = \frac{4}{N}$ となる受験者のデータを「外れ値」と見なすことにする。

3.1 「外れ値」として検出されるデータ

各受験者のてこ比を算出し、「外れ値」とみなされた受験者数を表1に示す。平成15年度の本試験および特例では12%台後半、平成16および17年度はそれよりもやや増加して13%台

後半のデータがてこ比の基準によって外れ値と見なされたことがわかる。

表1 てこ比で外れ値と見なされた受験者数

	全受験者	外れ値	割合(%)
平成15本試	28,325	3,562	12.6
平成15特例	7,174	925	12.9
平成16本試	21,298	2,921	13.7
平成17本試	17,791	2,413	13.6

通常「外れ値」と呼ばれるのはごく少数のデータであることを考えると、この割合は、やや多いように感じられる。それでは一体どのようなデータが外れ値として検出されたのであろうか。そこで、ある年度の試験を例に、てこ比による基準でどのようなデータが外れ値と見なされるのかを散布図で示したものが図1である（図中のA～Dについては後述）。

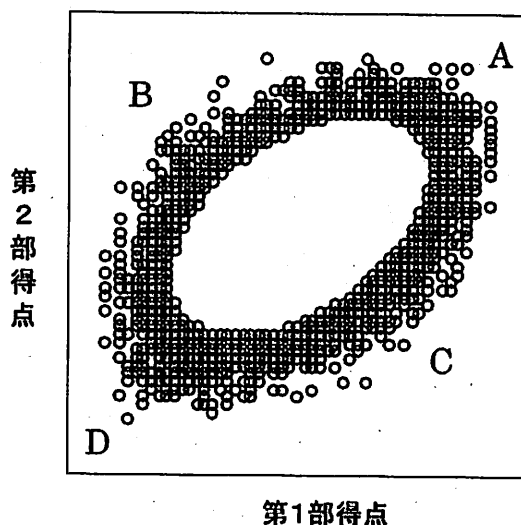


図1 てこ比により外れ値と見なされたデータ

てこ比の算出方法と合わせて考えると、分布において各主成分を軸としたある一定の大きさの楕円の外側にあるデータが外れ値とみなされることがわかる。外れ値とそうでないデータの境界付近は分布が連続しており、目視による方法では通常外れ値とはみなされないと思

われるデータであっても外れ値として検出され得る。

また、外れ値とみなされるデータは全方向的に広がっている。すなわち、適性試験の場合、てこ比によって外れ値とみなされるデータの得点パターンとして、(各カテゴリ間の境界は明確には決められないが)大雑把に分けると、以下のようなものがあるといえる(図のA~Dに対応)。

- A: 第1部・第2部とも得点が高い
- B: 第1部に比べて第2部の得点が高い(読解・表現の問題に強い)
- C: 第2部に比べて第1部の得点が高い(推論・分析の問題に強い)
- D: 第1部・第2部とも得点が高い

3.2 外れ値除外時の相関係数への影響

各回において外れ値を除外する前後の各種統計量の値を表2に示す。平均点については外れ値を除外する前後でほとんど変化がなく、標準偏差については外れ値除外すると概ね除外前の0.85倍前後の値になっている。また、最高点や最低点も変化し、特に第2部の最低点が大きく引き上げられていることがわかる。相関係数についてみると、外れ値除外後の値は平成15年度特例試験を除いてわずかに増大しているが、実質的にはほとんど変化がなく、相関

係数の差の検定を行ってみても統計的に有意な差ではない。もともとのデータにおいて、極端な外れ値が存在しないことや、受験者数が非常に多いためにごく少数の外れ値があっても全体として影響が弱いことなどが理由として考えられる。極端な外れ値がない場合は、てこ比に基づいて機械的に「外れ値」を削除しても相関係数の大きさについて考える上では特に支障は生じないともいえるであろう。

3.3 「外れ値」に着目した試験問題・受験者集団の性質の分析

前節ではてこ比に基づいて「外れ値」を除外しても相関係数にはほとんど影響しなかったが、このようなケースでは「外れ値」について考慮する意義はないのであろうか。そこで、「外れ値」と見なされた受験者の属性に着目することで得られる示唆について検討する。

適性試験では出願時に、受験者の出身学部類型として「法学部」「法学部以外の文系学部」「理系学部」のどれに当てはまるかを自己申告させている(ただし、平成15年度の試験では受験資格の区分によっては学部類型の別を記入しなくてもよいケースがある)。ここでは、受験者の属性として、この出身学部類型に着目したときに外れ値の出現の仕方に特徴があるかを調べてみることにする。

表2 外れ値除外前後の各種統計量の値

		人数	第1部得点				第2部得点				相関係数
			平均	SD	最高	最低	平均	SD	最高	最低	
平成15 本試	除外前	28,325	28.89	9.19	50	0	34.18	6.88	50	2	.550
	除外後	24,763	29.60	7.96	47	11	34.88	5.67	47	21	.560
平成15 特例	除外前	7,174	26.31	8.61	50	0	33.48	7.91	50	0	.599
	除外後	6,249	26.80	7.28	43	10	34.35	6.49	49	18	.592
平成16 本試	除外前	21,298	25.32	8.43	50	0	27.42	7.19	49	2	.479
	除外後	18,377	25.32	7.17	42	9	27.57	6.05	41	14	.493
平成17 本試	除外前	17,791	26.58	8.30	50	0	29.87	7.12	50	0	.410
	除外後	15,378	26.89	7.02	43	10	30.15	5.94	44	16	.419

表3～表6に各実施回における学部類型別の外れ値の割合を示す。どの回においても法学部出身者と法学部以外の文系学部出身者の外れ値の割合は同程度で、理系学部出身者は外れ値と

見なされる割合がわずかに多いことがわかる。平成15年度の特例措置試験は理系学部とそれ以外の学部の差が若干大きくなっているが本質的な違いではない。

表3 平成15年度本試験における学部類型別の外れ値の割合

	法学部	文系学部	理系学部	無記入	合計
外れ値	2,069	1,044	382	67	3,562
割合(%)	12.0	13.2	14.4	12.0	
全体	17,202	7,920	2,646	557	28,325

表4 平成15年度特例試験における学部類型別の外れ値の割合

	法学部	文系学部	理系学部	無記入	合計
外れ値	429	312	151	33	925
割合(%)	12.2	12.4	16.0	17.4	
全体	3,517	2,522	945	190	7,174

表5 平成16年度本試験における学部類型別の外れ値の割合

	法学部	文系学部	理系学部	合計
外れ値	1,765	826	330	2,921
割合(%)	13.4	13.9	15.6	
全体	13,219	5,964	2,115	21,298

表6 平成17年度本試験における学部類型別の外れ値の割合

	法学部	文系学部	理系学部	合計
外れ値	1,599	590	224	2,413
割合(%)	13.3	13.5	15.9	
全体	11,995	4,386	1,410	17,791

例えばある年度の試験について、学部類型別に外れ値とみなされた受験者を散布図で表すと、図2のようになる。

散布図より、理系学部出身者は、法学部や他の文系学部の出身者に比べると図1で示したAやCのパターンが多く、Bのパターンが非常に少ないことがわかる。この傾向はどの年度の試験においても共通している。すなわち、理系学部出身者は「読解・表現型の問題はよくで

きる割に推論・分析型の問題が苦手」という受験者に比べて、「推論・分析型の問題はよくできる割に読解・表現型の問題が苦手」という受験者がかなり多いということがわかる。

また、参考として、第1部と第2部を合計した総合得点の学部類型別平均点と標準偏差を表7に示す。どの回においても学部類型間差は非常に小さく、特に法学部出身者と理系学部出身者は平均点の観点から見る限りはほとん

ど等質の集団であるといえる。つまり、平均点には表れてこない一種の定性的な受験者集団の特徴が、外れ値に着目することで見えてくる可能性があることを示唆している。この適性試験は、学部段階での専門分野の影響が生じないことを目標として作成されており、平均点の観

点からは現状においても一定以上の水準でその目標を達成しているといえる。しかし、このような外れ値に着目した分析を詳細に行うことで、試験問題をさらによりよいものへと改善する方向性を与えてくれるものと考えられる。

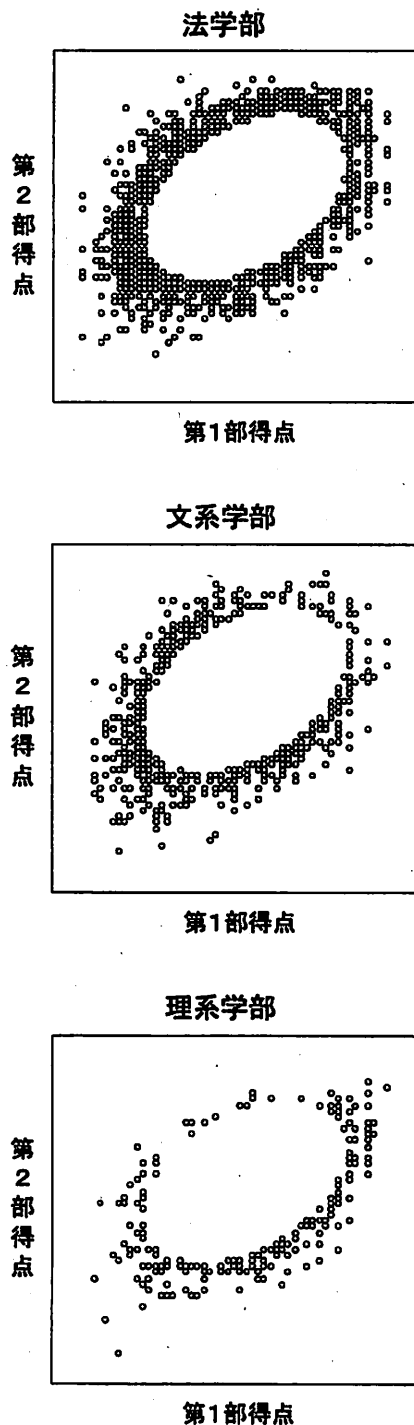


図 2 学部類型別の外れ値出現パターン

表 7 学部類型別の総合得点の平均点 (上段) と標準偏差 (下段括弧内)

	法学部	文系学部	理系学部
H15 本試	64.02 (14.13)	60.76 (14.10)	64.09 (14.04)
H15 特例	60.77 (14.69)	57.96 (14.54)	61.77 (15.04)
H16 本試	53.76 (13.45)	50.31 (13.14)	53.24 (13.46)
H17 本試	57.27 (12.96)	54.21 (12.62)	56.48 (13.17)

4. 外れ値検出の基準に関する考察

前節では Hoaglin and Welsch(1978)の基準を用いて外れ値の検出を行ったが、全体の1割以上が「外れ値」というのはやや違和感がある。本研究と同様に、てこ比に基づいた外れ値の検出を行っている柳井・伊藤(2006)では $h \geq 1.5(p/N)$ を外れ値の基準としているが、このようにデータの性質に合わせて異なる基準を用いることも考えられる。そこで、外れ値の基準として、てこ比の平均値(p/N)の3倍以上 ($h \geq 3(p/N)$) および5倍以上 ($h \geq 5(p/N)$) としたときの外れ値の割合および外れ値除外時の相関係数について調べてみた結果が表 8 である。表中の「基準」は、てこ比が $h \geq a(p/N)$ のデータを外れ値とする場合の a の値である。

表より、 $h \geq 3(p/N)$ を外れ値の基準とした場合で 4.0~4.6%、 $h \geq 5(p/N)$ の場合でも 0.3~0.7% のデータが外れ値として検出され、基準をかなり厳しくしてもある程度のデータは外れ値として検出されることがわかる。図 3 は図 1 のデータに「基準 5」を適用した場合の外

れ値の散布図であるが、「外れ値」としてより違和感の小さいものとなっているといえるであろう。また、Aのパターンの外れ値がほとんどなくなっていることがわかる。外れ値除外時の相関係数については、平成16年度の「基準3」の場合のみ5%水準で有意な相関係数の変化が見られるが、その場合でも変化量としては非常に小さく、本研究で用いたデータに関しては全体として「外れ値」を除外しても相関係数にはほとんど影響しないといえる。

表8 外れ値検出の基準を変えた場合

	基準	外れ値数	割合(%)	相関係数
H15 本	3	1,156	4.1	.551
	5	194	0.7	.547
H15 特	3	332	4.6	.598
	5	47	0.7	.601
H16 本	3	850	4.0	.497
	5	66	0.3	.485
H17 本	3	823	4.6	.413
	5	72	0.4	.410

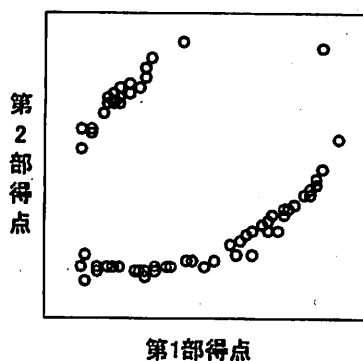


図3 厳しい基準を用いた場合の外れ値

5. まとめ

本研究で用いたデータに対して、てこ比を用いた従来提案されている基準によって外れ値の検出を行うと、散布図を目視した場合に比べてより広範囲のデータが外れ値として検出された。したがって、大規模データの場合は外れ値の基準を厳しくする等の調整が必要である

と考えられる。

また、受験者数が多い、あるいは相関係数に大きく影響するような極端な外れ値が存在しない場合には、てこ比の基準によって外れ値として検出されたデータを機械的に除外しても相関係数にはほとんど影響を与えないことが示唆された。

外れ値として検出される受験者というのはある意味で特徴的な得点パターンをとっていて、それ自体が何らかの情報を持っていると考えられることもできる。このような受験者の属性等に注目することによって、平均点には表れない受験者集団の性質を把握できる可能性がある。外れ値の出現パターンは受験者および試験問題の性質の相互作用によって生じるものと考えられることができるため、外れ値自体を積極的に分析していくことによって、試験問題を改善する方向性を示すことにも役立つ重要な情報を提供してくれることが期待される。

文献

- Hoaglin, R.R., and Welsh, R.E., 1978, "The hat matrix in regression and ANOVA." *The American Statistician*, 32: 17-22.
- 伊藤圭, 2006, 「主成分分析による多変量外れ値の検出」 柳井晴夫・緒方裕光 (編著) 『SPSSによる統計データ解析』現代数学社: 191-199.
- 繁樹算男・柳井晴夫・森敏昭 (編著), 1999, 『Q & Aで知る統計データ解析—DO's and DON'Ts—』サイエンス社.
- 司法制度改革審議会, 2001, 『司法制度改革審議会意見書—21世紀の日本を支える司法制度—』.
- 柳井晴夫・伊藤圭, 2006, 第12章「多変量外れ値の除去法とそのモニター試験データへの適用」大学入試センター研究開発部 (編) 『平成18年度大学入試センター試験モニター調査研究報告』148-163.